(*) dévient : $\frac{x_0}{c} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

$y = (\frac{x_0}{c} - 1)\frac{b^2}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$ d'où $K(\frac{a^2}{c}; \frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{y_0})$

3°/ $\vec{FM}\begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix}$; $\vec{FK}\begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{y_0} \end{pmatrix}$

$\vec{FM}\cdot\vec{FK} = (x_0 - c)(\frac{a^2 - c^2}{c}) + b^2(\frac{x_0}{c} - 1)$

$= (x_0 - c)(-\frac{b^2}{c}) + \frac{b^2}{c}(x_0 - c) = 0$ d'où $(FM) \perp (FK)$.

Solution 5 :

1°/ On a : $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z^2$ et $z_{\overrightarrow{M'M_2}} = 2z - z' = 2z - 2z + z^2 = z^2$ d'où

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M'M_2}$ et par suite OM_1M_2M' est un parallélogramme.

2°/a) $z' = 2z - z^2$. On pose $z = x + iy$

$z' = 2x + 2iy - (x^2 - y^2 + 2ixy) = 2x - x^2 + y^2 + i(2x - 2xy)$

z' est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow 2x - x^2 + y^2 = 0$ d'où

(H) : $x^2 - 2x - y^2 = 0$.

b) $x^2 - 2x - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 1$

on pose $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$ d'où (H) : $X^2 - Y^2 = 1$

alors (H) est un hyperbole équilatère.